

**EV\_2\_2\_MODELO DINÁMICO DEL COMPORTAMIENTO DEL MANIPULADOR MEDIANTE LA FORMULACIÓN EULER-LAGRANGE**

Cesar Omar Alvarado Contreras

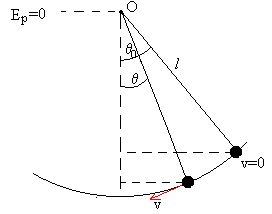
8° A Ing. Mecatrónica

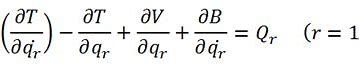
Dinámica y control de robots Profesor: Carlos Moran Garabito

**MODELO DINÁMICO Y FORMULACIÓN DE EULER-LAGRANGE**

La dinámica del robot relaciona el movimiento del robot y las fuerzas implicadas en el mismo. El modelo dinámico establece relaciones matemáticas entre las coordenadas articulares (o las coordenadas del extremo del robot), sus derivadas (velocidad y aceleración), las fuerzas y pares aplicados en las articulaciones (o en el extremo) y los parámetros del robot (masas de los eslabones, inercias, etc.).

**MODELADO DINÁMICO**

****Un gran número de problemas de control para sistemas mecánicos, están basados en el control de posición para la ubicación de masas, utilizando una fuerza o un torque como variable de entrada. En lugar de resolver tan solo el problema de dirigir el movimiento del posicionamiento de la variable de salida hacia un valor específico, a menudo la posición de la masa requiere seguir una trayectoria definida. Más niveles de complejidad pueden aparecer al introducir series de masas con dinámicas acopladas, para ser controladas mediante una serie de fuerza/torque de entrada. El caso estándar de la ‘puesta en acción’ se parece a un control fuerza/torque asociado con cada masa primaria y posteriormente aparecen fuerzas/torques desde el acoplamiento estático y dinámico de diferentes masas. El caso típico es un brazo robot o robot manipulador con n uniones conectadas para n articulaciones con accionadores generadores de fuerza/torque. Usualmente, la herramienta de último efecto se encuentra en el extremo del brazo para manipular los objetos de acuerdo con las especificaciones de aplicación. El caso de utilizar un número menor de acciones de control que el número de las masas primarias se llama sistema subaccionado y requiere consideraciones extraordinarias.

Las entradas fuerzas/torques son las salidas de los accionadores, a menudo accionadores eléctricos, con su propia dinámica compleja. Las dinámicas del accionador a menudo son despreciadas en el primer paso del diseño del controlador para el sistema electromecánico, suponiendo de estos son estables y considerablemente rápidos que las dinámicas inerciales de las masas. Debido a la gran variedad de accionadores, se considerará el tratamiento de los accionadores de control en la sección. También, otras dinámicas tales como las estructuras flexibles a menudo omitidas cuando se deriva el modelo básico para los sistemas mecánicos.

Antes de diseñar las estrategias de control para un sistema mecánico, deberá derivarse una un modelo dinámico que describa los principios básicos de comportamiento. En esta sección se considerarán los sistemas mecánicos holonómicos con restricciones en los movimientos y robots planos con restricciones de movimiento no holonómicos. Se han desarrollado varios métodos para obtener un modelo dinámico basado en las propiedades físicas de los sistemas. Una metodología popular es la formulación Euler-Lagrange para un sistema conservativo:

# **ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE**

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son las condiciones bajo las cuales cierto tipo de problema variacional alcanza un extremo. Aparecen sobre todo en el contexto de la mecánica clásica en relación con el [principio de mínima acción](http://oer2go.org/mods/es-wikipedia-static/content/a/principio_de_m%25c3%25adnima_acci%25c3%25b3n.html) aunque también aparecen en teoría clásica de campos ([electromagnetismo](http://oer2go.org/mods/es-wikipedia-static/content/a/electromagnetismo.html), Teoría general de la relatividad).

Definimos un conjunto de coordenadas generalizadas *qk* de manera que las coordenadas cartesianas de las diferentes partículas se escriben

x_i=x_i(q_k,t)\,

A partir de las relaciones entre coordenadas hallamos la relación entre velocidades derivando

\dot{x}_i=\sum_k\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial x_i}{\partial t}

La velocidad \dot{x}_ies una función de las coordenadas generalizadas, de las velocidades generalizadas y del tiempo. De la expresión anterior se deduce que

\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial x_i}{\partial q_k}

Por otro lado, si hallamos la derivada total respecto al tiempo de la derivada parcial

\frac{\mathrm{d}\ }{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)=\sum_p\frac{\partial\ }{\partial q_p}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial\ }{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)

Por las propiedades de las derivadas parciales se puede invertir el orden de cada derivada cruzada

\frac{\mathrm{d}\ }{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial \ }{\partial q_k}\left(\sum_p\frac{\partial x_i}{\partial q_p}+\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)=\frac{\partial\ }{\partial q_k}\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)

Es decir, resulta la identidad

\frac{\mathrm{d}\ }{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial q_k}

Deducción de las ecuaciones

Partimos de la definición

P_k = \sum_i m_i \ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}

Aplicamos la derivada de un producto

P_k = \frac{\mathrm{d}\ }{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)-\sum_i m_i\dot{x}_i\frac{\mathrm{d}\ }{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)

Sustituimos aquí las dos identidades obtenidas anteriormente

P_k = \frac{\mathrm{d}\ }{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right)-\sum_i m_i\dot{x}_i\left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}\right)

Si introducimos aquí la energía cinética K (que en mecánica analítica se escribe casi exclusivamente como T, pero por ser consistentes con la notación de otras páginas de este curso)

K=\frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{x}_i^2

la identidad anterior equivale a

P_k = \frac{\mathrm{d}\ }{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial K}{\partial q_k}

Llevando esto al principio de D'Alembert nos queda una primera versión de las ecuaciones de Lagrange

\sum_k\left(\frac{\mathrm{d}\ }{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial K}{\partial q_k}-Q_k\right)\delta q_k=0

donde las *Qk* no incluyen las fuerzas de reacción vincular. A esta ecuación hay que añadir las r ecuaciones de vínculo

\sum_k B_{jk}\dot{q}_k+B_{j0}=0\qquad\qquad(j=1,\ldots,r)

que permiten relacionar los desplazamientos virtuales

\sum_k B_{jk}\delta q_k=0\qquad\qquad(j=1,\ldots,r)

Coordenadas independientes

Cuando todos os vínculos son holónimos, es posible (en teoría; en la práctica pueden resultar ecuaciones irresolubles) elegir un sistema mínimo de tantas coordenadas como grados de libertad de forma que todos los vínculos se satisfagan automáticamente.

En ese caso, todos los desplazamientos virtuales son independientes y cada coeficiente se debe anular por separado, resultando las ecuaciones de Lagrange (o de Euler-Lagrange)

\frac{\mathrm{d}\ }{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial K}{\partial q_k}=Q_k

Coordenadas polares

Las ecuaciones de Lagrange proporcionan un método para calcular las componentes de la aceleración en diferentes sistemas de coordenadas sin tener que complicarse con vectores de la base y sus derivadas.

Consideremos una partícula que se mueve en el plano OXY, estando su posición expresada en coordenadas polares de manera que

\left\{\begin{array}{rcl}x & = & \rho\,C \\ y & = & \rho\,S\end{array}\right.\qquad\Rightarrow\qquad 
\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x} & = & \dot{\rho}\,C-\rho\,\dot{\theta}\,S \\ \dot{y} & = & \dot{\rho}\,S+\rho\,\dot{\theta}\,C\end{array}\right.\qquad\qquad \left(S=\mathrm{sen}(\theta),\ C=\cos(\theta)\right)

Esto da la energía cinética

K=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2\right)

Aplicamos ahora la ecuación de Lagrange a la coordenada radial

\frac{\partial{K}}{\partial \dot{\rho}}=m\dot{\rho}\qquad\qquad\frac{\mathrm{d}\ }{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial{K}}{\partial \dot{\rho}}\right)=m\ddot{\rho}\qquad\qquad \frac{\partial{K}}{\partial \rho}=m\rho\dot{\theta}^2

lo que nos da

m\left(\ddot{\rho}-\rho{\dot{\theta}^2}\right)=Q_\rho

Por tratarse la coordenada de una distancia la fuerza generalizada es simplemente la fuerza en dicha dirección, es decir

m\left(\ddot{\rho}-\rho{\dot{\theta}^2}\right)=F_\rho\qquad\rightarrow\qquad a_\rho=\ddot{\rho}-\rho{\dot{\theta}^2}

Operamos igualmente para la coordenada angular

\frac{\partial{K}}{\partial \dot{\theta}}=m\rho^2\dot{\theta}\qquad\qquad\frac{\mathrm{d}\ }{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial{K}}{\partial \dot{\theta}}\right)=m\left(2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho^2\ddot{\theta}\right)\qquad\qquad \frac{\partial{K}}{\partial \theta}=0

y obtenemos

m\left(2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho^2\ddot{\theta}\right)=Q_\theta

Por tratarse de un ángulo, la fuerza generalizada representa el momento de las fuerzas que actúan sobre la partícula y es igual al producto de la fuerza acimutal por el brazo del par, que en este caso es la distancia al origen

m\left(2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho^2\ddot{\theta}\right)=\rho F_\theta\qquad\Rightarrow\qquad a_\theta=2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta}

Fuerzas de reacción vincular

Si no todos los vínculos son holónimos o si deseamos hallar las fuerzas de reacción generalizadas debemos usar un número de coordenadas generalizadas superior al de grados de libertad.

A cada vínculo le corresponde una fuerza de reacción generalizada que podemos reintroducir en el sistema como una fuerza aplicada mediante los multiplicadores de Lagrange

\sum_k B_{jk} \mathrm{d}q_k+B_{j0}\,\mathrm{d} t = 0\qquad\Rightarrow\qquad Q^n_k=\lambda B_k

Al incluir cada una de estas fuerzas deja de aplicarse el vínculo correspondiente, aumentando en uno el número de diferenciales independientes y por tanto el número de ecuaciones

\frac{\mathrm{d}\ }{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial K}{\partial q_k}=Q_k+\sum_j \lambda_j B_{jk}